Mathematics for Computer Science: Optional Problem

Instructed by *Andrew C. Yao & Wang Yuexuan*

Due on June 17, 2010

Zhang Kunwei J92 2009011269

Optional Problem: 4. Spec 2(b)

Answer: 不会做。

Optional Problem: 6. Spec 1(b)

Let σ be a permutation so that for each node $j \in \{0,1\}^n$ in the hypercube network, a packet v_j is to be routed to node $\sigma(j)$. For each node j, let $\rho_j = e_1 e_2 \ldots e_{l_j}$ be the path followed by packet v_j under the bit-fixing strategy. Now let i be any fixed node. Let S be the set of $j = i$ such that the paths ρ_j and ρ_i share at least one common edge.

Prove that, for any $|S|$, the number of steps used in delivering packet v_i is no more than $l_i + |S|$.

Answer:

Lemma.1 S 中每个元素 ρ_k 与 ρ_i 相重合的部分是连续的一段。

Proof 分别取出 ρ_k 与 ρ_i 在它们最早重合与最晚重合的两条边之间的部分。这两个片段起始点相同，终止点相同。由于 Bit fixing 算法中任何的子路径还是一个 Bit fixing 算法，而且这个算法为一个包选择的路径只和起始点，终止点相关（是否延迟不影响路径的选择！），故这两个片段是完全一样的。

在算法执行过程中，定义 Q 是当前所有沿着 ρ_i 的数据包的集合（显然包含 i 自己）。初始时刻和最终时刻，只有 i 在 Q 中。因此 Lemma.1 说明， S 中除 i 始终在 Q 中之外，每个元素恰进出 Q 各一次。

Lemma.2 Q 中的元素与 Q 外的元素不会冲突。

Proof 如果冲突，说明在某时刻，一个 Q 外的元素和 Q 中的元素需要使用同一条通道。这样就得到 Q 外的元素需要占用一条沿着 ρ_i 的通道，这和 Q 的定义是矛盾的。

定义 D_k 为包 k 当前累计的时间延迟。

Lemma.3 D_k 值不同的包不会冲突。

Proof 在第 t 个单位时间中，数据包 k 是沿着第 $t - D_k$ 个二进制位被改变的方向传递的。 D_k 值不同的包传递方向不可能相同，而冲突的包传递方向必须是相同的。

把 Q 按照 D 分为 $Q_d = \{v_k \in Q | D_k = d\}$。则算法执行中，可能使 Q_d 产生变化的操作有：

1. S 中的一个元素进入 Q，表现为 Q_d 中增加了一个元素。
2. S 中的一个元素离开 Q。表现为 Q_d 中减少了一个元素。根据 Lemma.1，最多 $|S|$ 次。根据抽屉原理，在 $0 \leq d \leq |S|$ 共 $|S|+1$ 个 d 中，必有一个 d_0，使得 Q_{d_0} 中没有离开过元素。
3. 冲突：根据 Lemma.2，Lemma.3，冲突只可能在同一个 Q_d 中产生。由于冲突时抢到通道的元素没有被延迟，所以冲突后它还在 Q_d 中。而所有参与冲突的其他元素被移到了 Q_{d+1} 中。也就是说，某一个时间单位中在 Q_d 上发生的若干冲突表现为把一些 Q_d 中的元素移到 Q_{d+1} 中，但不能因此使 Q_d 变为空。

初始时刻 $v_i \in Q_0$。假设 $\exists k > 0$， v_i 的延迟 D_i 最终达到了 $|S|+k$，由于每次冲突只能使 D_i 增加 1，故在算法过程中， v_i 跑遍了 $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{|S|+k}$，其中包括 Q_{d_0}。这样，当 $v_i \in Q_{d_0}$ 的时候 Q_{d_0} 非空，之后无论如何冲突都不能使 Q_{d_0} 变为空集，而 Q_{d_0} 上又没有离开过元素。这样在算法结束时， Q_{d_0} 非空。但算法结束时 Q 中只有 i，且 $D_i = |S|+k > d_0$，故 Q_{d_0} 应该是空集。因此推出矛盾，我们得到 v_i 的延迟最多是 $|S|$。也就是说， v_i 的传输时间最长是 $l_i + |S|$。

Optional Problem: 7. Opt

Let C be the closed semi-circle of radius R where $R > 1$. What is the value of $\int_C \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$? Deduce the value of the real integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

Answer:
设 C 上的半圆弧为 L_R。当 R 足够大时，函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 在上半复平面的奇点 $z_1 = ae^{\frac{\pi}{4}i}$ 及 $z_2 = ae^{\frac{3\pi}{4}i}$ 都在由 L_R 及实轴上线段 $[-R, R]$ 所围成的区域内，因此由留数定理

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_2} f(z)\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

而 $R \to +\infty$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_{L_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}\right| &\leq \int_{L_R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|1+z^4|} \\ &\leq \frac{1}{R^4-1} \\ &= \frac{\pi R}{R^4-a^4} \to 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \lim_{R\to+\infty} \int_{L_R} \frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Acknowledgement: Answers here are all original.